LE TEMPS DES NOYAUX…

Raymond Bisdorff
Université du Luxembourg
Luxembourg
bisdorff@univ.lu

Marc Roubens
Université de Liège
Faculté polytechnique de Mons
roubens@belgacom.net

1. Introduction

Le titre peut surprendre. Nous l'avons retenu en hommage à notre Collègue Christian De Bruyn, passionné de littérature française et à notre Collègue René Moors dont l'humour parfois corrosif n'eût pas déplu à Jacques Prévert à qui nous avons emprunté l'une de ces « Paroles »

L'objet de cette étude est de construire une recommandation de choix des meilleurs objets au sein d'un ensemble d'objets (appelés parfois actions potentielles) sur lequel on a défini une relation de surclassement de type « préférence, indifférence, incomparabilité ». Lorsque la recommandation se résume à un meilleur objet unique on parle de « choix final d'une seule meilleure action » (cf. B. Roy et D. Bouyssou, 1993).
De nombreuses approches existent pour définir un tel sous-ensemble et parmi elles ,celle inspirée de la théorie des jeux et proposée en 1944, par J. von Neumann et O. Morgenstern. Ils retiennent un ensemble *intérieurement stable* ou simplement *stable* (les objets retenus sont incomparables entre eux) et *extérieurement stable* ou *dominant* (un objet non retenu est surclassé par au moins un des objets retenus). J. Riguet (1948) donne à ce concept de double stabilité intérieure et extérieure le nom de *noyau*.
B. Roy utilise également cette approche dans un contexte d'aide multicritère à la décision et propose de considérer comme recommandation du meilleur choix unique les actions du noyau du graphe induit par la relation de surclassement (graphe de surclassement). La difficulté de mise en œuvre de cette procédure de sélection réside en la possible vacuité ou multiplicité des noyaux dues à la présence éventuelle de circuits non transitifs. Dans ce cas, il est alors proposé de partitionner le graphe de surclassement en circuits maximaux et de rendre équivalentes toutes les actions du circuit en réduisant tout ou partie de ces circuits à une seule classe d'équivalence (ELECTRE I). On peut également envisager d'augmenter la différenciation des actions en supprimant certaines relations de surclassement de manière à assurer la rupture d'un circuit (ELECTRE IS). La contraction ou la rupture de circuits (guidée par un indicateur de robustesse) permet ainsi d'obtenir un noyau unique, c'est-à-dire une recommandation de meilleur choix unique, qui peut en plus être facilement construite grâce à la mise en ordre des sommets du graphe, dans ce cas assurée.

Notre approche retient également le concept de noyau pour définir une recommandation de meilleur choix unique. Cependant elle est originale par le fait qu'elle prend en compte à la fois « les bonnes actions » (sous-ensembles stables et dominants) et « les mauvaises actions », c'est-à-dire les sous-ensembles stables et absorbants (un objet non retenu surclasse au moins un des objets considérés comme mauvaises actions). N'ayant pas à recourir à la réduction des circuits maximaux en classes présumées d'ex æquo ou à la rupture de circuits, notre approche évite les modifications plus ou moins arbitraires du graphe de surclassement donné.

2. Le problème du meilleur choix dans le cas d'une relation binaire

Nous supposons devoir choisir le *meilleur candidat* au sein d'un ensemble fini d'actions potentielles noté X = {a,b,c,d,…}.

En vue d'atteindre cet objectif , on dispose d'une relation binaire de surclassement R définie sur X^2 (produit cartésien de X par X). aRb signifie que a surclasse b, Cette relation n'est généralement ni complète, ni antisymétrique, ni transitive.

Lorsque aRb et non(bRa), on dit que « a est globalement (et strictement) préféré à b ». Si aRb et bRa, « a est globalement indifférent à b ». Enfin si non (aRb) et non (bRa), alors « a est globalement incomparable à b »

X et R définissent un *graphe* orienté *de surclassement* G(X,R) dont les noeuds sont les actions potentielles et dont les arcs (a,b) correspondent à aRb (aussi noté $(a,b) \in R$). :

Un *choix* dans X est un sous-ensemble Y contenu dans X.

Un *choix* Y dans X *est stable* si Y est un singleton ou si $\forall a \neq b \in Y, (a,b) \notin R$.

Un *choix* Y dans X est d*ominant* si Y = X ou si $Y \subset X$, $\forall a \notin Y, \exists b \in Y, (b,a) \in R$

Un *choix* Y dans X est *absorbant* si Y = X ou si $Y \subset X$, $\forall a \notin Y, \exists b \in Y, (a,b) \in R$.

Un choix dominant et stable dans X est un *noyau dominant* dans le graphe G(X,R).

Un choix absorbant et stable dans X est un *noyau absorbant* dans le graphe G(X,R).

L'union des choix dominants et stables dans X forme un sous-ensemble dominant et peut être considéré comme un *choix* NR *dans* X *qui ne peut être rejeté sans regret.* Une action quelconque x de X peut appartenir à NR (on note alors nR(x) = 1), peut ne pas appartenir à NR (on note NR(x) = 0) ou peut être *neutre* lorsque aucun choix dominant et stable n'existe (on note NR(x) = n).

L'union des choix absorbants et stables forme un sous-ensemble absorbant et constitue un *choix dans* X *qui ne peut être accepté sans regret.* Son complémentaire peut être retenu comme un *choix* A *dans* X *qui peut être accepté sans regret.* Une action quelconque x de X peut appartenir à

A (on note alors $A(x) = 1$) peut ne pas appartenir à A (on note $A(x) = 0$) ou peut être neutre lorsque aucun choix dominant et stable n'existe (on note $A(x) = n$)

Dans le cas ou un graphe admet à la fois des noyaux dominants et absorbants, la neutralité, l'adhésion ou la non adhésion d'une action x au *meilleur choix* sont déterminées à l'aide de la table de vérité suivante (Table 1) ;

NR(x) \ A(x)	**0**	**n**	**1**
1	n	n	1
n	n	n	n
0	0	n	n

Table 1

La neutralité d'une action en tant qu'élément du meilleur choix est due à la contradiction observée entre l'acceptation et le rejet sans regret.

Soit C *une composante connexe d'un graphe de surclassement* G(X,R). *Si C admet un ensemble de noyaux dominants et absorbants*, *un* meilleur *choix dans* C *est un choix qui doit être à la fois accepté sans regret et ne pas être rejeté sans regret. Si aucun noyau absorbant existe, la recommandation est donnée par le choix* NR (*les objets qui ne peuvent être rejetés sans regret*). *Inversément*, *si aucun noyau dominant existe*, *la recommandation est donné par le choix* A *(les objets qui peuvent être acceptés sans regret*). *Si aucun meilleur choix n'existe dans* C, *on retient l'ensemble des actions neutres dans* C. *Sur l'ensemble* X*, la recommandation de meilleur choix est donnée par l'union des recommandations établies dans chaque composante connexe*.

Il est important de noter que l'on peut ainsi procéder à la détermination du meilleur choix en travaillant dans chaque composante connexe du graphe G(X,R). En effet, une action appartient (n'appartient pas) au meilleur choix si et seulement si elle appartient (n'appartient pas) au meilleur choix de la composante connexe qui la contient. Une action est neutre relativement au meilleur choix si et seulement si elle est neutre dans la composante connexe qui la contient**.**

La détermination d'un noyau (dominant ou absorbant) présentée dans l'ouvrage de G. Schmidt et T. Ströhlein (1989) est un problème NP complet. Elle ne peut être réalisée de manière exacte que par énumération des choix possibles. Une approche opérationnelle par énumération contrainte permet cependant de calculer facilement presque tous les noyaux de graphes d'une taille inférieure à 100 objets (voir R.Bisdorff et M.Roubens 1996).

Si $Y(.) =: (Y(a_1),\ldots,Y(a_n))$ représente le vecteur caractéristique du noyau dominant $Y \subseteq X =: \{a_1,\ldots,a_n\}$ où $Y(x) = 1$ si $x \in Y$ et $Y(x) = 0$ sinon, pour tout $x \in X$,

$Y(.)$ est solution (si elle existe) du système d'équations booléennes (voir G.Schmidt et T. Ströhlein, 1989) :

$$1 - Y(a) = \bigvee_{b \neq a} (Y(b) \wedge R(b,a)),\ \text{pour tout } a \in X \qquad (1)$$

où R(a,b) représente la valuation booléenne associée à la relation de surclassement R : $R(a,b) = 1$ si aRb, $R(a,b) = 0$ sinon, et où $\vee$ et $\wedge$ représentent respectivement les opérateurs de disjonction et de conjonction dans le treillis booléen $\mathbb{B} = \{0,1\}$.

Avec les mêmes notations, le vecteur caractéristique du noyau absorbant est solution (si elle existe) du système d'équations booléennes :

$$1 - Y(a) = \bigvee_{b \neq a} (Y(b) \wedge R(a,b)), \text{ pour tout } a \in X , \qquad (2)$$

Considérons deux exemples simples pour illustrer le propos.

Exemple 1

Soit le graphe $G_1(X,R)$ avec X : {a,b,c,d,e,f} et R :{(a,b), (a,c), (b,c), (c,a), (c,e), (d,b), (d,f), (e,d)}.

X est un ensemble connexe. Il existe deux noyaux dominants dans G_1 (X,R) : {a,e,f} ; {c,d} et un seul noyau absorbant : {b,e,f}. Le complémentaire de {b,e,f} présente trois sommets communs avec l'union des noyaux dominants : {a,c,d}. Cet ensemble d'actions représente le meilleur choix et il est non stable, dominant et non absorbant.

Sous forme vectorielle, l'union des noyaux dominants donne :

NR(.) = (NR(a), NR(b), NR(c), NR(d), NR(e), NR(f)) = (1, 0, 1, 1, 1, 1)

et le complémentaire du noyau absorbant :

A(.) = (A(a), A (b), A(c), A(d), A(e), A(f)) = (1, 0, 1, 1, 0, 0).

Par la table de vérité (Table 1) on constate que le meilleur choix est défini par le vecteur MC(.) = (1, 0, 1, 1, n, n), c'est-à-dire les actions a, c, d méritent d'être sélectionnés, b peut être certainement écarté, tandis que e et f apparaissent neutres.

Le deuxième exemple illustre le cas d'un graphe de surclassement non connexe.

Exemple 2

Soit le graphe $G_2(X,R)$ avec X : {a,b,c,d,e} et R : {(a,b), (b,c), (c,b), (d,e)}.

Le graphe G_2 présente deux composantes connexes {a,b,c} et {d,e}. Si l'on travaille dans le graphe $G_2(X,R)$ on obtient comme noyau dominant {a,c,d} et comme noyaux absorbants {a,c,e} et {b,e}. On obtient alors NR(.) = (1, 0, 1, 1, 0) et A(.) = (0, 0, 0, 1, 0) et le meilleur choix correspond à MC(.) = (n, 0, n, 1, 0).

Si l'on travaille dans les deux composantes connexes, on obtient dans {a,b,c} comme noyau dominant {a,c} et comme noyaux absorbants {a,c} et {b} alors que dans {d,e}, {d} est le noyau dominant et {e} le noyau absorbant. Dans {a,b,c} le vecteur du meilleur choix est (n, 0, n) et dans {d,e} il vaut (1, 0).

Exemple 3

Soit le graphe $G_3(X,R)$ avec X : {a,b,c,d} et R : {(a,b), (a,c), (a,d), (b, c), (c,d), (d,b)}.

Le graphe G_3 est connexe et admet {a} comme noyau dominant. Cependant il n'admet pas de noyau absorbant. Le meilleur choix est décrit unilatéralement par le vecteur NR(.) = (1, 0, 0, 0), et la recommandation de choix nous donne {a} comme meilleure action.

Les exemples 1 et 2 montrent l'intérêt de prendre en compte dans la construction du meilleur choix à la fois les noyaux dominants et les noyaux absorbants. Lorsqu'on traite le cas d'un ordre total ou partiel, le meilleur choix est naturellement donné par la partie commençante du graphe à l'exclusion de tous les autres nœuds et aucun élément ne dispose du statut de neutralité.

On peut de plus remarquer que si le graphe est symétrique, aucun meilleur choix ne peut exister dans l'ensemble proposé car une structure composée uniquement d'indifférences et d'incomparabilités ne peut conduire qu'à la prise en compte d'ex æquo et ne permet pas la différentiation préférentielle des objets. En particulier ni le graphe vide ni le graphe complet n'admettent un possible meilleur choix car tous leurs objets sont en fait neutres par rapport à la question du meilleur choix.

Le deuxième exemple illustre le fait que la recommandation de meilleur choix doit considérer de manière séparée chaque composante connexe qui peut exister dans un graphe de surclassement.

Enfin, dans les cas ou le graphe n'admet pas de noyaux dominants ou absorbants comme dans l'exemple 3 ci-dessus, nous faisons reposer la recommandations unilatéralement sur les noyaux correspondants observées.

Dans la pratique de l'aide à la décision multicritère, le graphe de surclassement global est valué et un indice de crédibilité des surclassement observés est attaché à chaque paire d'actions. Dans la section suivante, nous particularisons l'approche au cas d'une relation de surclassement de type ordinal.

3. Le problème du meilleur choix dans le cas d'une relation valuée ordinale

3.1 Noyaux dominants et absorbants valués

Nous sommes toujours à la recherche du meilleur candidat au sein d'un ensemble X
On suppose disposer d'une relation de surclassement L- valuée R. R(a,b) est une fonction définie sur un ensemble fini L : $\{c_0, c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{2m}\}$ qui constitue une chaîne à (2m+1) éléments ordonnés et qui peut être considérée comme un indicateur de crédibilité ordinal de la proposition aRb. Si $R(a,b) = c_0$, aRb n'est appuyée sur aucun argument significatif susceptible de la valider et la relation de surclassement est absolument non crédible. Si R(a,b) = c_{2m}, aRb est appuyée sur des arguments tout à fait convaincants permettant de ne pas douter de sa validité et la relation de surclassement est absolument crédible. Si R(a,b) sup R(c,d), aRb est appuyée par des arguments qui la rendent plus crédible que cRd. On définit également sur L un opérateur de contradiction $\neg$ tel que $\neg c_i = c_{(2m-i)}$ pour i = 0,…2m. Si la proposition aRb est plus ou moins crédible (R(a,b) = $c_{(m+k)}$, avec k = 1 ;…,m) alors non(aRb) est plus ou moins non crédible. Le niveau de crédibilité médian c_m apparaît comme point fixe de l'opérateur de contradiction. Dans ce cas aRb est autant peu crédible que non crédible.

On note G^L = (X,R) le graphe orienté valué dont les nœuds sont représentés par X de cardinal n, X = $(a_1, \ldots, a_n)$ et les arcs par (a,b) sur lesquels on considère une valuation ordinale R(a,b), pour tout a,b appartenant à X, définie sur L.

La relation binaire « nette » définie dans la section 2 apparaît comme cas limite où m = 1, sans que la valeur médiane $c_1 = n$ (niveau de neutralité) ne figure dans l'expression de la crédibilité attachée à la relation de surclassement. Sans ambiguité, c_0 peut être codé par 0 et c_2 par 1.

On considère le vecteur caractéristique du noyau dominant valué comme la représentation d'une fonction d'appartenance de chaque action de X au noyau dominant (toute action potentielle appartient au noyau dominant avec un certain degré de crédibilité) à l'aide d'un vecteur $\tilde{Y}(.) = (\tilde{Y}(a_1),\ldots,\tilde{Y}(a_n))$ tel que, pour tout a_i appartenant à X, $\tilde{Y}(a_i) \in L$.

Ce vecteur est solution du système d'équations fonctionnelles :

$$\tilde{Y}(a) = \min_{b\neq a}[\max(\neg\tilde{Y}(b), \neg R(b,a))] \text{ , pour tout a,b } \in X, \tag{3}$$

qui peut être réécrit sous la forme :

$$\neg\tilde{Y}(a) = \max_{b\neq a}[\min(\tilde{Y}(b), R(b,a))] \text{ , pour tout a,b } \in X, \tag{4}$$

Ce dernier système représente une extension valuée des équations fournies par (1)

On obtient de même le vecteur caractéristique du noyau absorbant valué comme solution (si elle existe) de

$$\tilde{Y}(a) = \min_{b\neq a}[\max(\neg\tilde{Y}(b), \neg R(a,b))] \text{ , pour tout a,b } \in X, \tag{5}$$

3.2 Propriétés des vecteurs caractéristiques associés aux noyaux valués

On considère l'ensemble des solutions du système (3) permettant de déterminer les noyaux dominants, $\tilde{Y}^{dom}(G^L)$. Considérons deux de ces solutions distinctes : $\tilde{Y}_1^{dom}(.)$ et $\tilde{Y}_2^{dom}(.)$.

$\tilde{Y}_1^{dom}(.)$ est une solution « plus tranchée » que la solution $\tilde{Y}_2^{dom}(.)$ si les crédibilités attachées à la première sont plus proches de 1 (pour les valeurs supérieures ou égales à c_m) ou de 0 (pour les valeurs inférieures ou égales à c_m) que les crédibilités de la seconde.

On note alors $\tilde{Y}_1^{dom}(.) \succ \tilde{Y}_2^{dom}(.)$. Dans ce cas ,

$$\tilde{Y}_1^{dom}(a) \geq \tilde{Y}_2^{dom}(a) \geq c_m \text{ ou } \tilde{Y}_1^{dom}(a) \leq \tilde{Y}_2^{dom}(a) \leq c_m, \qquad \text{pour tout } a \in X \ .$$

La relation $\succ$ définit un ordre total sur l'ensemble $\tilde{Y}^{dom}(G^L)$. Les *solutions les plus tranchées* de $\tilde{Y}^{dom}(G^L)$ forment un sous-ensemble de $\tilde{Y}^{dom}(G^L)$, noté $\tilde{Y}_{tr}^{dom}(G^L)$.

A l'ensemble $\tilde{Y}_{tr}^{dom}(G^L)$, on peut faire correspondre un ensemble de choix nets Y^{dom} par la réalisation d'une c_m-coupe stricte de chaque solution de $\tilde{Y}_{tr}^{dom}(G^L)$. Si l'on note une solution quelconque de Y^{dom} par son vecteur caractéristique booléen $Y^{dom}(.)$, on a $Y^{dom}(a) = 1$ ssi $\widetilde{Y}_{tr}^{dom}(a) \succ c_m$.

Il a été montré dans R. Bisdorff, M.Pirlot et M.Roubens (2004) qu'*il existe un isomorphisme entre les éléments de Y^{dom} et les noyaux dominants définis sur le graphe non valué obtenu à partir d'une* c_m *-coupe stricte des arêtes de G^L*

Les propriétés des solutions valuées du système d'équations (4) pour l'obtention des noyaux absorbants valués qui définissent l'ensemble $\widetilde{Y}^{abs}(G^L)$ sont en tous points semblables à celles définies pour $\widetilde{Y}^{dom}(G^L)$. Il suffit de travailler dans le graphe $(G^L)^t : (X,R^t)$ où R^t représente la relation transposée : $R^t(a,b) = R(b,a)$.

La c_m-coupe stricte de chaque solution de l' ensemble $\widetilde{Y}^{dom}(G^L)$ conduit à un ensemble de vecteurs booléens noté Y^{abs} et l'on comprend sans difficulté qu'*il existe un isomorphisme entre les éléments de* Y^{abs} *et les noyaux absorbants définis sur le graphe non valué obtenu à partir d'une* c_m *-coupe stricte des arêtes de* $(G^L)^t$.

3.3 Détermination des solutions valuées tranchées

L'isomorphisme établi entre les noyaux nets (dominants et absorbants) et les solutions tranchées des équations (3) et (5) constitue la clé de la détermination de ces solutions.

Considérons d'abord le système d'équations (4) , à savoir :

$$\widetilde{Y}(a) = \min_{b \neq a}[\max(\neg\widetilde{Y}(b), \neg R(b,a))] \text{ , pour tout } a,b \in X,$$

et l'échelle ordinale $L_0 : \{c_0, c_1, ..., c_{m-1}, c_{m+1}, ..., c_{2m}\}$, c'est-à-dire l'échelle L amputée du niveau médian c_m.

Considérons la transformation T qui applique une n-fonction $\widetilde{U}$ définie sur le produit cartésien $(L_0)^n$ sur $(L_0)^n$:

$$T\widetilde{U}(a) = \min_{b \neq a}[\max(\neg\widetilde{U}(b), \neg R(b,a))]$$

Les points fixes de T sont les solutions de (4) ou de manière équivalente de (3).

R. Bisdorff, M.Pirlot et M.Roubens (2004) ont montré que s*i l'on considère comme fonction de départ* $\widetilde{U}(a) = c_{2m}$ *si* $Y^{dom}(a) = 1$ *(*ou $Y^{abs}(a) = 1$*) et* $\widetilde{U}(a) = c_0$ *si* $Y^{dom}(a) = 0$ (*ou* $Y^{abs}(a) = 0$) *il existe un entier fini k, tel que* $T^k\,\widetilde{U}(a) = T^{k+1}\,\widetilde{U}(a)$, *pour tout a* $\in X$, *et que ce point fixe correspond à la solution tranchée de (3) (ou (5)) isomorphe* à Y^{dom} (*ou* Y^{abs})

Afin d'aider le lecteur on considère un dernier exemple :

Exemple 4

On reprend ici le cas traité dans l'ouvrage de B. Roy et D. Bouyssou (1993). Soit $G^L(X, R)$ tel que X : {1,2,3,4,5,6,7,8,9} ; R(i,j) selon la Table 2; L = {0,…,100} ; $c_m = 50$:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	72	67	79	92	74	69	25	5
2	69	100	87	72	92	64	0	27	67
3	62	92	100	85	92	77	21	79	59
4	69	85	79	100	100	72	24	8	4
5	0	0	0	0	100	0	0	0	0
6	0	0	0	0	95	100	42	0	0
7	77	57	30	59	87	92	100	79	9
8	45	21	17	21	67	27	27	100	64
9	12	18	6	17	74	0	0	48	100

Table 2 : relation de surclassement valuée

Les noyaux dominants de la coupe stricte-c_m de R sont {1,8} et {3,7} et le noyau absorbant est réduit à l'action 5. A ces solutions nettes correspondent les solutions valuées :

$\widetilde{Y}^{dom}_{tr,1}(.) = (55, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 55, 45)$,

$\widetilde{Y}^{dom}_{tr,2}(.) = (24, 30, 70, 30, 24, 24, 76, 24, 41)$ et

$\widetilde{Y}^{abs}_{tr,1}(.) = (8, 8, 8, 0, 100, 5, 13, 33, 26)$.

On considère enfin la détermination du meilleur choix valué défini à partir de G^L .

3.4 Détermination du meilleur choix valué

On définit les vecteurs caractéristiques correspondant aux solutions tranchées définissant les noyaux dominants et absorbants valués. Elles sont notées respectivement $\{ \widetilde{Y}^{dom}_{tr,i}(.); i = 1,..., n_d \}$ et $\{ \widetilde{Y}^{abs}_{tr,j}(.); j = 1,..., n_a \}$.

Le vecteur des crédibilités de chaque action comme « *ne pouvant être rejetée sans regret* » est noté $N\widetilde{R}(.)$ et correspond à l'opération d'union des solutions tranchées :

$$N\widetilde{R}(x) = \max_{i=1,...,n_d} \widetilde{Y}^{dom}_{tr,i}(x) \text{ , pour tout } x \in X .$$

Le vecteur des crédibilités de chaque action comme « *pouvant être acceptée sans regret* » est noté $\widetilde{A}(.)$ et correspond à :

$$\widetilde{A}(x) = \neg \{ \max_{i=1,...,n_a} \widetilde{Y}^{abs}_{tr,j}(x) \} \text{ , pour tout } x \in X .$$

Si le graphe admet des noyaux dominants et absorbants valués, le vecte*ur* $M\widetilde{C}(.)$ *de crédibilité d'appartenance de toute action* $x \in X$ *au meilleur choix* est obtenu par l'*opérateur de conciliation* C défini comme suit :

$M\widetilde{C}(x) = C(N\widetilde{R}(x), \widetilde{A}(y)) = \min(N\widetilde{R}(x), \widetilde{A}(y))$ si $x \geq c_m$ et $y \geq c_m$

$= \max(N\widetilde{R}(x), \widetilde{A}(y))$ si $x \leq c_m$ et $y \leq c_m$

$= c_m$ sinon

Cet opérateur de *conciliation* C présente les propriétés suivantes :

P 1 : commutativité : $C(x,y) = C(y,x)$, pour tout $x,y \in L$

P.2 : associativité : $C(x,(y,z) = C((x,y),z)$, pour tout $x,y,z \in L$

P.3 : monotonie : $C(x,y) \geq C(x,z)$, pour tout x, $y \geq z \in L$

P.4 : respect du caractère ordinal des mesures de crédibilité

P.5 : absence de décrochage : si $C(c_i, c_j) = c_k$, alors $c_k \leq C(c_i, c_{j+1}) \leq c_{k+1}$, pour tout

$i \in \{0,\ldots,n\}$, $j,k \in \{0,\ldots, n\text{-}1\}$

Notre opérateur de conciliation C est proche du t-opérateur défini par M. Mas, G. Mayor et J. Torrens (1999) sur $[0, 1]^2$. Dans le cas où $L = \{0,n,1\}$, C correspond au cas net et à la table 1

Lorsque le graphe n'admet pas de noyaux absorbants (respectivement dominants) valués, $M\widetilde{C}(x) = N\widetilde{R}(x)$ (respectivement $M\widetilde{C}(x) = \widetilde{A}(y)$). Dans le cas ou le graphe n'admet aucun noyau dominant ou absorbant, nous considérons que toutes les actions sont neutres et aucun meilleur choix ne peut exister dans X, c'est-à-dire $M\widetilde{C}(x) = c_m$, $\forall x$ dans X.

Soit C *une composante connexe de la* c_m*-coupe stricte du graphe* G^L. *La recommandation de choix considère l'ensemble des actions* x *dans* C *qui apparaissent plus ou moins crédibles comme meilleur choix* ($M\widetilde{C}(x) \succ c_m$) *et propose comme meilleur choix valué la ou les actions les plus crédibles que l'on peut y observer. Si aucun meilleur choix n'existe dans* C, *les actions telles que* $M\widetilde{C}(x) = c_m$ *sont à retenir. Sur l'ensemble* X, *la recommandation de meilleur choix valué est donnée par l'union des recommandations par composante connexe.*

Exemple 4 (suite)

Si l'on reprend l'exemple 4, on obtient :
$N\widetilde{R}(.) = (55, 45, 70, 45, 45, 45, 76, 55, 45)$ et $\widetilde{A}(.) = (92, 92, 92, 100, 0, 95, 87, 67, 74)$.

En suivant la définition de l'opérateur de conciliation on obtient que le meilleur choix valué est finalement décrit par le vecteur :
$M\widetilde{C}(.) = (55, 50, 70, 50, 45, 50, 76, 55, 50)$.

Comme le graphe c_m– coupé de cet exemple est connexe, la recommandation de choix reprend dès lors l'ensemble des actions qui apparaissent plus ou moins crédibles comme meilleur choix. Ainsi, l'action 7 donne le choix le plus crédible (crédibilité: 76) suivie de près de l'action 3 (crédibilité :70) alors que les actions 1 ou 8 sont dans une moindre mesure susceptibles d'être un meilleur choix (crédibilité :55). Les actions 2, 4,5, 6 et 9 présentent une crédibilité inférieure ou égale à la valeur médiane 50 et peuvent être écartées compte tenu des meilleurs choix précédents.

A titre de comparaison, en utilisant l'approche ELECTRE IS , B. Roy et D. Bouyssou (1993) proposent les conclusions suivantes : « les actions 5, 6, 8 peuvent être éliminées ; 1 ou 7 mérite d'être sélectionnée, 9 mérite d'être sélectionnée ; l'une des actions 2, 3 ou 4 doit être sélectionnée (quelques éléments jouent en faveur de 4) »

Enfin, une confirmation empirique des résultats peut être obtenue à partir des scores nets relatifs à chacune des actions qui conduirait au classement suivant (scores nets entre parenthèses) :

$7(3.08) \succ 3(2.81) \succ 1(1.49) \succ 2(1.33) \succ 4(1.09) \succ 8(0.23) \succ (-0.73) \succ 6(-2.69) \succ 5(-6.99)$

Il est important de remarquer ici, que par notre approche, seul le rangement ordinal des crédibilités est pris en compte.

4. Conclusion

Dans ce texte nous avons introduit une méthode originale pour construire une recommandation de meilleur choix à partir d'une relation de surclassement associée d'un indice de crédibilité ordinal. Elle se caractérise essentiellement par l'utilisation conjointe des concepts de noyau dominant et absorbant, c'est-à-dire de choix stables dominants et stables absorbants pour dégager un meilleur choix unique, s'il existe. Contrairement aux méthodes Electre I et IS, nous n'avons nullement besoin de modifier le graphe de surclassement donné pour exhiber une recommandation précise. Enfin, la comparaison à la méthode des scores nets dans un exemple concret confirme la pertinence opérationnelle de l'approche.

c'est fini

le temps des cerises ne reviendra plus

ni le temps de noyaux non plus …

(*Extrait du Temps des noyaux de Jacques Prévert*)

Bibliographie

Bisdorff, R., Pirlot, M. & Roubens, M., On good choices with kernels from ordinal valued binary relations, working paper, 2004

Bisdorff, R. & Roubens, M. On defining and computing fuzzy kernels from L-valued simple graphs, In Da Ruan and al. eds. *Intelligent Systems and Soft Computing for Nuclear Science and Industry*, FLINS'96 workshop. World Scientific Publishers, Singpoure, 1996, 113-123

Mas, M., Mayor G. & Torrens, J. , t-operators, International Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Based Systems, 7 (1999) 31-50

Roy, B. & Bouyssou, D., *Aide à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica, Paris, 1993

Schmidt, G. & Ströhlein, Th., *Relations and Graphs*. Springer-Verlag, Berlin, 1991

Von Neumann, J. & Morgenstern, O., *Theory of games and economic behaviour*, Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1944