Analyse inverse robuste à partir d'informations préférentielles partielles

Thomas Veneziano[1,2], Patrick Meyer[2,3], Raymond Bisdorff[1]

[1] University of Luxembourg
ILIAS - CSC
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi, L-1359 Luxembourg
{raymond.bisdorff,thomas.veneziano}@uni.lu
[2] Institut Télécom ; Télécom Bretagne
UMR CNRS 3192 Lab-STICC
Technopôle Brest Iroise CS 83818 F-29238 Brest Cedex 3, France
patrick.meyer@telecom-bretagne.eu
[3] Université européenne de Bretagne

Résumé : *Dans cet article, nous proposons une méthode indirecte d'élicitation robuste de l'importance des critères à partir d'informations préférentielles partielles exprimées par un décideur, dans un contexte de relations valuées bipolaires de surclassement. Nous montrons que la modélisation de telles informations par un modèle mathématique linéaire en variables mixtes suffit à estimer l'importance des critères de façon adéquate.*

Mots-Clés *: aide multicritère à la décision, robustesse, analyse inverse, surclassement, élicitation de poids*

1 Introduction

Nous considérons une situation de décision dans laquelle un ensemble d'alternatives (actions potentielles) est évalué sur une famille finie et cohérente (c'est à dire préférentiellement indépendante, minimale et exhaustive) de critères de performance. Un décideur est amené à comparer par paires ces alternatives en s'appuyant sur les principes des méthodes de surclassement. On considère qu'une alternative a *surclasse* une alternative b lorsqu'une *majorité significative* de critères valide le fait que a est au moins aussi bonne que b et qu'il n'existe aucun critère sur lequel a montre une contre-performance notoire par rapport à b [1, 2]. La notion de majorité significative est directement liée à la connaissance de l'importance (ou poids) de chaque critère [3]. Ces paramètres peuvent être déterminés :

– soit *directement*, les poids étant donnés par le décideur et permettent ainsi le calcul de la relation de surclassement [4] ;
– soit *indirectement*, le décideur étant amené à fournir des connaissances partielles, permettant d'inférer les poids des critères [5, 6].

Dans cet article, nous nous concentrons exclusivement sur l'approche indirecte. Des approches similaires, nombreuses dans le domaine de la théorie de l'utilité multiattribut, on été généralement publiées sous les termes de méthodes de *désagrégation / agrégation* ou *régression ordinale* [7, 8, 9, 10, 11, 12]. En adéquation avec les techniques correspondantes en statistique inférentielle, nous préférons regrouper l'ensemble des techniques de modélisation d'information de préférence indirecte sous le terme d'*analyse inverse* en aide multicritère à la décision.

L'analyse inverse proposée dans cet article se base sur le concept de robustesse de la validation du surclassement par rapport à un ensemble potentiel de poids [3]. Nous parlerons de robustesse de Condorcet pour désigner ce type d'informations, conformément à [3]. Cet article s'inscrit dans la suite de nos travaux (voir [6]) et nous montrons ici comment déduire de telles affirmations robustes à partir de préférences partielles exprimées par un décideur, en vue d'estimer numériquement des poids de critères.

L'article s'articule de la façon suivante : nous introduisons ci-après la dénotation de robustesse de Condorcet d'une relation valuée bipolaire de surclassement, suivi d'une explication rapide sur la façon d'obtenir cette dénotation. Ensuite, en section 3, nous présentons le modèle mathématique d'estimation du poids de signification des critères, suivi d'une simulation d'expérience en section 3.5. Nous terminons par des conclusions et des perspectives de travaux futurs.

2 La robustesse de Condorcet d'une relation valuée de surclassement

Dans cette section, nous introduisons une mesure de la qualité de la robustesse d'une relation nette obtenue à partir de la coupe majoritaire d'une relation valuée bipolaire de surclassement. Dans un premier temps, nous définissons cette mesure, puis montrons comment, à partir d'un graphe de surclassement valué et d'un ensemble de poids de signification des critères, nous pouvons réaliser cette mesure, appelée *dénotation de robustesse de* Condorcet [6]. Enfin, nous proposons une nouvelle propriété concernant cette dénotation de robustesse.

2.1 Définitions

Soient $A = \{x, y, z, \ldots\}$ un ensemble fini de $n > 1$ alternatives potentielles et $F = \{g_1, \ldots, g_m\}$ une famille cohérente de $m > 1$ critères.

Pour chaque critère g_i, on évalue les alternatives sur des échelles de performance réelles, auxquelles on associe des seuils de discrimination : un seuil d'indifférence q_i et un seuil de préférence p_i [4]. On note x_i la performance de l'alternative x sur le critère g_i.

Afin de caractériser la proposition *"l'alternative x est au moins aussi bonne que l'alternative y sur le critère g_i"*, on associe à chaque critère $g_i \in F$ un ordre à deux seuils S_i dont la représentation numérique est obtenue par :

$$S_i(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i + q_i \geqslant y_i \ , \\ 0 & \text{si} \quad x_i + p_i \leqslant y_i \ , \\ 0.5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, nous associons à chaque critère $g_i \in F$ un poids de signification rationnel w_i, qui représente la contribution de g_i dans la validation (ou non) de la proposition "x est au moins aussi bonne que y", pour toutes les paires d'alternatives. Soit $W = \{w_i : g_i \in F\}$ l'ensemble des poids associé à F, tel que $0 < w_i < 1$ $(\forall g_i \in F)$ et $\sum_{g_i \in F} w_i = 1$ et notons $\mathcal{W}$ l'ensemble de ces ensembles de poids.

La *relation valuée bipolaire de surclassement globale*[1], notée $\widetilde{S}^W$, agrégeant les situations de surclassement locales, en vertu de la cohérence de la famille de critères, est donnée par :

$$\widetilde{S}^W(x, y) = \sum_{w_i \in W} w_i \cdot S_i(x, y),\ \forall(x, y)\ \in\ A \times A.$$

$\widetilde{S}^W(x, y)$ est alors évaluée sur un intervalle rationnel $[0, 1]$ avec la sémantique suivante [2] :

– $\widetilde{S}^W(x, y) = 1$ lorsque l'ensemble des critères valide les situations de surclassement locales entre x et y ;
– $\widetilde{S}^W(x, y) > 0.5$ lorsqu'une majorité de critères valide la proposition "x est au moins aussi bonne que y" ;
– $\widetilde{S}^W(x, y) = 0.5$ dans le cas d'une situation d'indétermination, lorsque le poids des critères en faveur du surclassement est exactement balancé par celui des critères en défaveur ;
– $\widetilde{S}^W(x, y) < 0.5$ lorsqu'une majorité de critères ne valide pas la proposition "x est au moins aussi bonne que y" ;
– $\widetilde{S}^W(x, y) = 0$ lorsqu'aucun des critères ne valide les situations de surclassement locales entre x et y.

Soit $\succsim_W$ le préordre[2] sur F associé à la relation habituelle $\geqslant$ sur l'ensemble W des poids de signification des critères. $\sim_W$ induit r classes d'équivalences ordonnées $\Pi_1^W \succ_W \ldots \succ_W \Pi_r^W$ $(1 \leq r \leq m)$. Tous les critères d'une même classe d'équivalence ont des poids de même valeur dans W et, pour $i < j$, les critères de Π_i^W ont un poids plus grand que ceux de la classe Π_j^W. Nous dénotons $W_{\mathbb{1}}$ le jeu de poids représentant des critères équi-signifiants.

On note $\mathcal{W}_{\succsim_W} \subset \mathcal{W}$ l'ensemble de tous les ensembles de poids respectant le préordre $\succsim_W$ et soit $W \in \mathcal{W}$. La *dénotation de robustesse* de CONDORCET [3] de $\widetilde{S}^W$, notée $[\![\widetilde{S}^W]\!]$, est définie, pour tous $(x, y) \in A \times A$ par :

$$[\![\widetilde{S}^W]\!](x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } \widetilde{S}^V(x, y) = 1\ \ \forall V \in \mathcal{W}\,; \\ 2 & \text{si } \left[\widetilde{S}^V(x, y) > 0.5\ \ \forall V \in \mathcal{W}_{\succsim_W}\right]\ \wedge\ \left[\exists V' \in \mathcal{W}\ :\ \widetilde{S}^{V'}(x, y) < 1\right]; \\ 1 & \text{si } \left[\widetilde{S}^W(x, y) > 0.5\right]\ \wedge\ \left[\exists V' \in \mathcal{W}_{\succsim_W}\ :\ \widetilde{S}^{V'}(x, y) \leqslant 0.5\right]; \\ 0 & \text{si } \widetilde{S}^W(x, y) = 0.5\,; \\ -1 & \text{si } \left[\widetilde{S}^W(x, y) < 0.5\right]\ \wedge\ \left[\exists V' \in \mathcal{W}_{\succsim_W}\ :\ \widetilde{S}^{V'}(x, y) \geqslant 0.5\right]; \\ -2 & \text{si } \left[\widetilde{S}^V(x, y) < 0.5\ \ \forall V \in \mathcal{W}_{\succsim_W}\right]\ \wedge\ \left[\exists V' \in \mathcal{W}\ :\ \widetilde{S}^{V'}(x, y) > 0\right]; \\ -3 & \text{si } \widetilde{S}^V(x, y) = 0\ \ \forall V \in \mathcal{W}\,; \end{cases}$$

avec la sémantique suivante :

– $[\![\widetilde{S}^W]\!](x, y) = \pm 3$ lorsque tous les critères *valident unanimement* (resp. *invalident*) la situation de surclassement entre x et y ;
– $[\![\widetilde{S}^W]\!](x, y) = \pm 2$ si une *majorité significative* de critères *valide* (resp. *invalide*) la situation de surclassement entre x et y pour tous les jeux de poids de même préordre que W ;
– $[\![\widetilde{S}^W]\!](x, y) = \pm 1$ si une *majorité significative* de critères *valide* (resp. *invalide*) la situation de surclassement entre x et y pour W mais pas pour tous les jeux de poids de même préordre ;
– $[\![\widetilde{S}^W]\!](x, y) = 0$ si le poids des critères en faveur du surclassement est exactement balancé par celui des critères en défaveur pour W.

Le lecteur attentif remarquera qu'en présence d'une situation de veto dans la comparaison d'un

1. Nous ignorons dans cette étude les situations de veto.
2. $\succ_W$ représente la partie asymétrique de $\succsim_W$, alors que $\sim$ représente sa partie symétrique.

TABLE 1 – Tableau de performance

crit. (F)	dir. pref.	poids (W)	alternatives (A) a	b	c	d	e	seuils indiff.	pref.
g_1	max	5/15	70.9	61.8	90.2	31.2	33.1	5.0	8.0
g_2	min	1/15	20.9	17.1	76.3	69.2	35.5	3.0	6.0
g_3	max	3/15	1	4	6	8	6	0	1
g_4	max	4/15	17.3	46.3	24.5	40.6	68.2	6.0	7.0
g_5	max	2/15	2	1	8	2	6	0	1

couple d'alternatives [3], la valeur de robustesse de CONDORCET associée sera -3, étant donné que la relation de surclassement global $\widetilde{S}^W$ est égale à 0, indépendamment des poids des critères.

2.2 Détermination de la dénotation de robustesse de CONDORCET

Dans cette section, nous expliquons brièvement comment obtenir la dénotation de robustesse de CONDORCET à partir d'une relation de surclassement valuée et d'un ensemble de poids associés à des critères. De plus amples détails pourront être trouvés dans [3].

En vue d'illustrer nos propos tout au long de cet article, nous considérons l'exemple numérique suivant.

Exemple *Soit* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *un ensemble de cinq alternatives et* F *l'ensemble composé de trois critères cardinaux* $\{g_1, g_2, g_4\}$*, mesurant les performances des alternatives sur des échelles rationnelles allant de* 0.0 *à* 100.0 *et de deux critères ordinaux* $\{g_3, g_5\}$*, mesurant les performances sur une échelle ordinale discrète allant de* 0 *à* 10*.* g_2 *est un critère de coût, pour lequel les performances doivent être minimisées, alors que les quatre autres sont des critères de bénéfice, pour lesquels on privilégie les valeurs élevées.*

La table 1 représente les performances de l'ensemble des alternatives sur chaque critère. On peut remarquer l'ensemble des poids W*, en troisième colonne, qui induit l'ordre d'importance des critères suivant :* $\{g_1\} \succ_W \{g_4\} \succ_W \{g_3\} \succ_W \{g_5\} \succ_W \{g_2\}$*.*

Nous introduisons ici des notations qui permettront de détailler la construction de la dénotation de CONDORCET associée à une relation de surclassement $\widetilde{S}^W$ et un ensemble de poids W.

Soit $c_k^W(x, y)$ la somme des $S_i(x, y)$ pour tous les critères $g_i \in \Pi_k^W$, et $\overline{c_k^W}(x, y)$ la somme de la négation $(1.0 - S_i(x, y))$ de ces caractéristiques.

De plus, soit $C_k^W(x, y) = \sum_{i=1}^{k} c_i^W(x, y)$ la somme cumulée des caractéristiques "*au moins aussi bon que*" pour tous les critères ayant une importance au moins égale à celle associée à la classe Π_k^W, et $\overline{C_k^W}(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \overline{c_i^W}(x, y)$ la somme cumulée des négations de ces caractéristiques, pour tous les $k \in \{1, \dots, r\}$.

Pour les paires ordonnées (x, y), en l'absence de dénotation égale à ± 3 (*i.e.* aucune des deux alternatives ne surclasse trivialement l'autre et aucun veto n'est levé), la proposition suivante nous permet de tester la présence d'une dénotation égale à ± 2 :

Table 2 – Sommes cumulées pour les couples (b, c) et (a, d)

	$c_i^W(b,c)$	$\overline{c_i^W}(b,c)$	$C_i^W(b,c)$	$\overline{C_i^W}(b,c)$	$c_i^W(a,d)$	$\overline{c_i^W}(a,d)$	$C_i^W(a,d)$	$\overline{C_i^W}(a,d)$
Π_1^W	0	1	0	**1**	1	0	**1**	0
Π_2^W	1	0	**1**	**1**	0	1	**1**	**1**
Π_3^W	0	1	1	**2**	0	1	1	**2**
Π_4^W	0	1	1	**3**	1	0	**2**	**2**
Π_5^W	1	0	2	**3**	1	0	**3**	2

Table 3 – Surclassement et dénotation de Condorcet associée

	$\widetilde{S}^W$					$[\![\widetilde{S}^W]\!]$				
A	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
a	-	.50	.07	.53	.40	-	0	-2	1	-1
b	.53	-	.33	.67	.40	1	-	-2	2	-1
c	.93	.67	-	.47	.67	2	2	-	-1	2
d	.60	.60	.53	-	.53	1	1	1	-	1
e	.60	.60	.53	.80	-	1	1	1	2	-

Proposition 1 (Bisdorff [3])

$$[\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) = 2 \iff \begin{cases} \forall k \in 1,...,r : C_k^W(x,y) \geqslant \overline{C_k^W}(x,y)\,; \\ \exists k \in 1,...,r : C_k^W(x,y) > \overline{C_k^W}(x,y). \end{cases}$$

La dénotation négative -2 est obtenue dans des conditions similaires, en renversant les inégalités.

Le test de la dénotation ± 2 en Proposition 1 traduit la vérification de conditions de *dominance stochastique* (voir [3]).

La dénotation ± 1, correspondant à une simple observation de majorité (resp. minorité) pondérée, est vérifiée, dans le cas où la dénotation ± 2 n'est pas applicable, ainsi :

$$[\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) = \pm 1 \iff \big((\widetilde{S}^W(x,y) \gtrless 0.5) \;\wedge\; [\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) \neq \pm 2 \big).$$

Exemple *En revenant à notre exemple, nous pouvons désormais obtenir la dénotation de robustesse de* Condorcet *associée à la relation de surclassement. Nous détaillons simplement les calculs pour les couples (b, c) et (a, d). Pour rappel, le préordre sur les importances induit un préordre en cinq classes sur les critères : $\{g_1\} \succ_W \{g_4\} \succ_W \{g_3\} \succ_W \{g_5\} \succ_W \{g_2\}$.*

On vérifie aisément dans la Table 2 que $[\![\widetilde{S}^W]\!](b, c) = -2$. Parallèlement, on note que $[\![\widetilde{S}^W]\!](a, d) \neq \pm 2$. Comme $\widetilde{S}^W(a, d) = 0.53 > 0.5$, nous en déduisons $[\![\widetilde{S}^W]\!](a, d) = 1$. La table 3 récapitule la relation de surclassement $\widetilde{S}^W$, ainsi que la dénotation de Condorcet *correspondante $[\![\widetilde{S}^W]\!]$ pour l'ensemble des paires d'alternatives dans $A \times A$.*

2.3 Propriété de la dénotation

Soit $W_{\mathbb{1}}$ le jeu de poids associant la valeur de signification 1 à tous les critères. On observe la propriété suivante :

Proposition 2

$$\widetilde{S}^{W_{\mathbb{1}}}(x,y) < 0.5 \Rightarrow \forall W \in \mathcal{W},\ [\![\widetilde{S}^{W}]\!](x,y) \leq 1$$
$$\widetilde{S}^{W_{\mathbb{1}}}(x,y) > 0.5 \Rightarrow \forall W \in \mathcal{W},\ [\![\widetilde{S}^{W}]\!](x,y) \geq -1$$

Preuve : Si $\widetilde{S}^{W_{\mathbb{1}}}(x,y) < 0.5$: Si l'on veut obtenir une dénotation +2 pour la paire ordonnée (x,y), selon la Proposition 1, on doit vérifier la condition suivante : $C_k^W(x,y) > \overline{C_k^W}(x,y)$, pour tous les k, notamment $k = r$, l'indice de la classe la plus faible. Or, $C_r^W(x,y)$ représente le nombre de critères (parmi l'ensemble complet des critères) en faveur du surclassement. Si $\widetilde{S}^{W_{\mathbb{1}}}(x,y) < 0.5$, alors cela signifie que moins de la moitié des critères sont en faveur du surclassement et nous obtenons : $C_r^W(x,y) < \overline{C_r^W}(x,y)$, quel que soit le jeu de poids W.

La démonstration est similaire pour la deuxième partie de la proposition. □

En d'autres termes, s'il n'y a pas au moins la moitié des critères en faveur du surclassement, il est impossible de trouver un jeu de poids robuste au sens de Condorcet, c'est à dire en ne considérant que le préordre des poids. On ne peut garantir la robustesse d'un surclassement allant à l'encontre du surclassement obtenu avec des poids tous équi-signifiants.

3 Analyse inverse pour l'estimation des poids

Dans [6] nous avons montré comment déterminer un ensemble de poids associé aux critères compatible avec une dénotation de Condorcet donnée. En pratique, il est cependant difficile d'imaginer qu'un décideur soit capable de donner tout ou même une partie de la dénotation de Condorcet associée à la relation de surclassement valuée observée dans son problème. Cependant, on peut facilement concevoir qu'un décideur puisse exprimer d'autres informations préférentielles utiles (comparaisons par paires, signification différenciée des critères), permettant l'estimation numérique d'un jeu de poids compatible en passant par la dénotation de robustesse de Condorcet.

Dans un souci de compréhension, nous redonnons dans une première partie les contraintes mathématiques associées à chaque valeur de robustesse, hormis les valeurs ±3, ainsi que de rapides explications. De plus amples détails pourront être trouvés dans [6]. Dans une seconde partie, nous détaillons le type d'informations préférentielles que nous pouvons intégrer dans le modèle de détermination des poids, et la façon dont nous proposons d'utiliser la dénotation de Condorcet en vue de garantir une plus grande robustesse des résultats.

3.1 Contraintes inhérentes à la robustesse de Condorcet

Comme nous l'avons exprimé précédemment, aucune contrainte nécessaire à la résolution de notre problème ne peut être dérivée dans le cas d'une valeur de robustesse de ±3. En effet, nous pouvons ignorer les situations d'unanimité, positive ou négative, car elles concernent des comparaisons par paires triviales entre alternatives qui sont soit Pareto dominantes, soit Pareto dominées. La situation de surclassement global est alors unanimement garantie (resp. non garantie), indépendamment de tout jeu de poids sur les critères. En outre, ces dénotations n'apportent aucune information spécifique pour estimer la signification de chaque critère pris séparément.

Notons $A^2_{\pm 2}$ (resp. $A^2_{\pm 1}$ ou A^2_0) l'ensemble des pairs (x, y) d'alternatives telles que $[\![\widetilde{S}^w]\!](x, y) = \pm 2$ (resp. ± 1 ou 0).

Les poids des critères étant supposés rationnels, nous pouvons, sans perte de généralité, restreindre notre problème d'estimation à des ensembles d'entiers. Ainsi, un poids entier $w_i \in [1, M]$ sera associé à chaque critère g_i, où M représente la valeur maximale admissible. En limitant notre objectif à la résolution de problèmes réels, nous pourrons en pratique fixer cette borne comme étant égale au nombre m de critères.

Posons $P_{m\times M}$ une matrice Booléenne de terme générale $[p_{i,u}]$, qui caractérise par ligne le nombre d'unités de poids alloué au critère g_i. Formellement, la ligne i représente la décomposition du poids associé à g_i sur M bits dans une base unaire (avec les bits de poids fort le plus à gauche), de sorte que $\sum_{u=1}^{M} p_{i,u} = w_i$. Par exemple, si g_i est associé à un poids entier de 3 et que l'on a fixé $M = 5$, alors la $i^{ème}$ ligne de $P_{m\times 5}$ sera $(1, 1, 1, 0, 0)$.

Comme à chaque critère g_i doit être associé un poids strictement positif, nous pouvons en déduire qu'une unité de poids au minimum est allouée à chaque critère, *i.e.* $p_{i,1} = 1$ pour tous les $g_i \in F$. Cela résulte en la contrainte suivante :

$$\sum_{g_i \in F} p_{i,1} = m.$$

Les contraintes suivantes garantissent l'écriture correcte des lignes de P, les bits de poids fort étant tous regroupés à gauche du vecteur ligne :

$$p_{i,u} \geqslant p_{i,u+1} \quad (\forall i = 1, ..., m,\ \forall u = 1, ..., M - 1).$$

3.1.1 Contraintes dans les cas où $[\![\widetilde{S}^w]\!](x, y) = \pm 2$

Pour toutes les paires $(x, y) \in A^2_{\pm 2}$, nous introduisons alors l'ensemble de contraintes suivant, modélisant les conditions $[\![\widetilde{S}^w]\!](x, y) = \pm 2$:

$$\sum_{g_i \in F} \Big(p_{i,u} \cdot \pm \big[S_i(x, y) - \overline{S_i}(x, y) \big] \Big) \ \geqslant\ b_u(x, y) \quad (\forall u = 1, ..., M),$$

où $\overline{S_i}$ représente la négation $(1 - S_i)$ de la fonction caractéristique d'ordre à deux seuils du critère g_i, et où les $b_u(x, y)$ sont des variables booléennes définies pour chaque paire d'alternatives et chaque niveau d'équi-signifiance $u \in \{1, \ldots, M\}$. Ces variables binaires imposent au moins un cas d'inégalité stricte pour tous les $(x, y) \in A^2_{\pm 2}$, comme requis par la Proposition 1, via les contraintes suivantes :

$$\sum_{u=1}^{m} b_u(x, y) \ \geqslant\ 1, \quad (\forall (x, y) \in A^2_{\pm 2}).$$

3.1.2 Contraintes dans les cas où $[\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) = \pm 1$

Afin de modéliser les contraintes inhérentes aux conditions $[\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) = \pm 1$, nous formulons l'ensemble suivant de contraintes, pour toutes les paires $(x,y) \in A^2_{\pm 1}$:

$$\sum_{g_i \in F} \left(\sum_{u=1}^{M} p_{i,u} \right) \cdot \pm \left(S_i(x,y) - \overline{S}_i(x,y) \right) \geqslant 1 \;\; \forall (x,y) \in A^2_{\pm 1},$$

où le facteur $(\sum_{u=1}^{M} p_{i,u})$ représente la valeur entière de l'estimation du poids w_i du critère g_i.

3.1.3 Contraintes dans les cas où $[\![\widetilde{S}^W]\!](x,y) = 0$

A l'instar de la section précédente, pour toutes les paires $(x,y) \in A^2_0$, nous formulons l'ensemble suivant de contraintes :

$$\sum_{g_i \in F} \left(\sum_{u=1}^{M} p_{i,u} \right) \cdot \left(S_i(x,y) - \overline{S}_i(x,y) \right) = 0.$$

3.1.4 Relaxation des contraintes à l'aide de variables d'écart

Comme nous l'expliquerons plus en détail dans la section suivante, en pratique il est impossible de demander directement cette dénotation à un décideur, en vue de déterminer la signification des critères. Il nous faudra donc inférer, à partir de ses préférences, les contraintes jugées nécessaires. Dans la pratique, nous devons alors faire face à la fois à des incompatibilités inhérentes aux préférences du décideur (celui-ci ayant exprimé un ensemble de préférences dont la réalisation simultanée est impossible) et aussi à des difficultés pour assurer la robustesse du surclassement lié au jeu de poids résultant. Pour ce dernier point en effet, il ne sera pas toujours possible de garantir tous les surclassements robustes souhaités, lorsque ceux-ci sont incompatibles entre eux ou bien, lorsque selon la Proposition 2, ils ne peuvent tout simplement jamais être satisfaits.

On introduit alors la notion de *contraintes relaxées*, que l'on dérive des *contraintes originelles* (ou contraintes fortes) en y ajoutant des *variables d'écart*. Ces variables, réelles positives que l'on cherchera à minimiser, permettent la satisfaction des contraintes de la dénotation de robustesse en cas d'impossibilité, et offrent la possibilité d'identifier les contraintes problématiques lors de l'analyse de la solution. En effet, si la valeur d'une variable d'écart n'est pas nulle à la fin de la résolution, alors la contrainte associée n'a pas pu être satisfaite. Selon la valeur de la dénotation, les conséquences diffèrent :

– Sur une contrainte de type ± 1 ou 0, une variable d'écart non nulle indique le changement de sens du surclassement, dans le cas où l'on ne parvient pas à trouver un jeu de poids vérifiant tous les surclassements ;
– Sur une contrainte de type ± 2, les variables d'écart permettent d'assurer qu'il n'y aura pas de blocage dans la résolution si l'on souhaite de la robustesse là où le modèle ne pourra la garantir.

Ainsi, nous utilisons des variables d'écart sur les contraintes de type ± 1 et 0 lorsque le décideur n'est pas certain d'un surclassement ou bien lorsqu'il est prêt à revoir son jugement sur certains surclassements si ceux-ci sont incompatibles avec d'autres auxquels il accorde une plus forte crédibilité. Sur les contraintes de type ± 2, elles permettent d'éviter le blocage de la résolution du problème lorsque l'on n'a pas réussi à assurer la robustesse. Il est à noter que, lorsqu'une contrainte relaxée de type

± 2 est violée, le surclassement n'est plus assuré ; il faut par conséquent coupler une telle contrainte relaxée avec une contrainte forte de type ± 1 de même sens si l'on veut garantir le surclassement.

On redonne ici les contraintes sous leurs versions relaxées :

$$\begin{array}{llr}
\sum\limits_{g_i \in F} \Big(p_{i,u} \cdot \pm \big[S_i(x,y) - \overline{S_i}(x,y) \big] \Big) \ \pm\ s_u^{\pm 2}(x,y) \ \geqslant\ b_u(x,y) & \forall u = 1, ..., M & \forall (x,y) \in A^2_{\pm 2} \\
\sum\limits_{g_i \in F} \big(\sum\limits_{u=1}^{M} p_{i,u} \big) \cdot \pm \big(S_i(x,y) - \overline{S}_i(x,y) \big) \ \pm\ s^{\pm 1}(x,y) \ \geqslant\ 1 & & \forall (x,y) \in A^2_{\pm 1} \\
\sum\limits_{g_i \in F} \big(\sum_{u=1}^{M} p_{i,u} \big) \cdot \big(S_i(x,y) - \overline{S}_i(x,y) \big) \ +\ s^0_+(x,y) \ -\ s^0_-(x,y) \ =\ 0 & & \forall (x,y) \in A^2_0
\end{array}$$

où $s_u^{\pm 2}(x,y)$ (resp. $s^{\pm 1}(x,y)$) sont les variables d'écart associées au couple (x,y). Notons que pour les contraintes associées à une dénotation de valeur 0, il faut à chaque fois deux variables d'écart, $s^0_+(x,y)$ et $s^0_-(x,y)$ afin de connaître, en cas de non-satisfaction, dans quel sens le surclassement a été validé.

3.2 Prise en compte des préférences d'un décideur

Dans la section précédente nous avons décrit les contraintes induites par les valeurs de robustesse spécifiques sur l'obtention des poids des critères. Cependant, comme déjà signalé précédemment, en pratique il est difficile d'imaginer qu'un décideur soit capable de fournir des valeurs de robustesse pour tout couple d'alternatives. Nous proposons dans cette section d'identifier l'information préférentielle qu'un décideur est susceptible de fournir dans le cadre du problème de décision, et de présenter la façon dont cette information est intégrée dans le modèle d'analyse inverse.

3.2.1 Identification des préférences

La technique d'acquisition de cette information via un questionnement particulier du décideur n'est pas abordée ici. En effet, nous avons prévu d'étudier cette tâche dans nos travaux futurs.

De manière générale, dans le cadre que nous avons établi aux sections précédentes, on peut supposer qu'un décideur soit en mesure de fournir les informations préférentielles suivantes :

- un sous-ensemble E de $A \times A$ de couples ordonnés d'alternatives (a,b) pour lesquels le décideur est en mesure d'indiquer un sens de préférence strict ou une indifférence ;

  Exemple : a est préférée à b et c est indifférente à d ;
- un préordre partiel $\succeq_N$ sur les poids d'un sous-ensemble de critères $N \subseteq F$;

  Exemple : le critère g_1 a un poids plus important que le critère g_4 ;
- des valeurs numériques associées aux poids de certains critères ;

  Exemple : le poids du critère g_2 vaut 3 ;
- des contraintes sur les valeurs numériques associées aux poids de certains critères ;

  Exemple : le poids du critère g_1 est entre 2 et 4 ;
- un préordre partiel entre des ensembles de critères exprimant des préférences sur les sommes des poids de certains critères ;

  Exemple : les critères g_1 et g_3 pris ensemble sont plus importants que le critère g_2 ;
- des ensembles de critères pouvant valider ou invalider le surclassement ;

Exemple : si une alternative x est au moins aussi bonne qu'une alternative y sur les critères g_1, g_2 et g_3, alors le surclassement de x sur y est validé.

Nous détaillons dans la section suivante la traduction de ces informations préférentielles en contraintes linéaires dans le cadre du modèle d'analyse inverse que nous présentons dans cet article.

3.2.2 Traduction des préférences en contraintes linéaires

Le premier type d'information préférentielle concerne des préférences strictes et des indifférences sur un sous-ensemble d'alternatives E. Soit P la relation de préférence stricte sur E et I la relation d'indifférence sur E. Si le décideur estime que aPb alors on a nécessairement $\widetilde{S}^W(a,b) > 0.5$ et $\widetilde{S}^W(b,a) < 0.5$, où W est le jeu de poids recherché. De même, si le décideur exprime que cId alors on a $\widetilde{S}^W(c,d) > 0.5$ et $\widetilde{S}^W(d,c) > 0.5$.

En vue de fournir une réponse robuste au décideur, nous optons pour la traduction suivante de l'information préférentielle en contraintes linéaires :

- Une contrainte forte de type $+1$ pour le couple (a,b) afin de garantir le surclassement ;
- Une contrainte relaxée de type $+2$ pour le couple (a,b) pour viser un surclassement robuste ;
- Une contrainte forte de type -1 pour le couple (b,a) ;
- Une contrainte relaxée de type -2 pour le couple (b,a).

De façon similaire, on traduit les préférences sur l'indifférence entre les alternatives c et d de la façon suivante :

- Des contraintes fortes de type $+1$ pour les couples (c,d) et (d,c) afin de garantir l'indifférence ;
- Des contraintes relaxées de type $+2$ pour les couples (c,d) et (d,c) pour viser une indifférence robuste.

Il est à noter que, selon la Proposition 2, si le surclassement va à l'encontre du surclassement élémentaire, il ne sera pas possible de garantir la robustesse au sens de Condorcet et donc inutile de rajouter les contraintes relaxées de type ± 2.

Les informations sur les poids des critères sont plus aisées à représenter en contraintes linéaires. Ainsi, si un décideur souhaite fixer le poids du critère g_i à la valeur entière v, on ajoute la contrainte :

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} = v$$

Si le décideur désire encadrer la valeur du critère g_i entre les entiers u et v, nous pouvons ajouter les contraintes suivantes :

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} \geq u \qquad \text{et} \qquad \sum_{c=1}^{M} p_{ic} \leq v$$

Le fait que le critère g_i est, selon le décideur, plus important que le critère g_j se traduira par l'ajout de la contrainte :

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} \geq \sum_{c=1}^{M} p_{jc} + 1$$

On généralise cette formule aux sous-ensembles de critères : Si un sous-ensemble H de critères a une importance plus grande que celle du sous-ensemble K, alors on ajoute la contrainte :

$$\sum_{g_i \in H} (\sum_{c=1}^{M} p_{ic}) \geq \sum_{g_j \in K} (\sum_{c=1}^{M} p_{jc}) + 1$$

On peut aussi modéliser le fait qu'un sous-ensemble H soit, selon le décideur, suffisant pour valider un surclassement (la somme de ses poids est strictement supérieure à la moitié de la somme des poids de tous les critères) :

$$\sum_{g_i \in H} (\sum_{c=1}^{M} p_{ic}) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{g_j \in F} (\sum_{c=1}^{M} p_{jc}) + 1$$

3.3 Fonction objectif

Nous faisons ici le choix de ne pas explorer l'ensemble du polytope des solutions viables, mais de déterminer un ensemble de poids W^* :

- satisfaisant l'ensemble des contraintes $[\![\widetilde{S}^{W^*}]\!](x, y) = \pm 1$,
- respectant au mieux les contraintes $[\![\widetilde{S}^{W^*}]\!](x, y) = \pm 2$, et
- avec les poids $w_i^* \in W^*$ ($\forall g_i \in F$) les plus petits possibles (ce qui, en pratique, tend à utiliser le moins de classes d'équi-signifiance possible).

En conséquence, nous introduisons la fonction objectif suivante, devant être minimisée :

$$K_1 (\sum_{g_i \in F} \sum_{u=1}^{M} p_{i,u}) \; + \; K_2 (\sum_{(x,y) \in A^2_{\pm 2}} \sum_{u=1}^{M} s_u^{\pm 2}(x, y)) \; - \; K_3 \Big(\sum_{u=1}^{M} (\sum_{(x,y) \in A^2_{\pm 2}} b_u(x, y)) \Big)$$

où $K_1 ... K_3$ sont des constantes paramétriques utilisées pour ordonner correctement les trois sous-objectif. Notons que la troisième partie de l'objectif n'est pas nécessaire à la résolution du problème, mais elle garantit un renforcement maximal des contraintes $[\![\widetilde{S}^{W}]\!](x, y) = \pm 2$ en forçant si possible le maximum d'inégalités strictes.

3.4 Le programme mathématique d'analyse inverse

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des couples (x, y) tel que x surclasse y, c'est à dire que le décideur préfère x à y ou bien qu'ils lui sont indifférents, auquel cas l'ensemble contient aussi le couple (y, x). Soit $\overline{\mathfrak{S}}$ l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels le décideur préfère y à x. En résumé, nous donnons ici le programme mathématique linéaire en variables mixtes :

PLVM

Variables :

$p_{i,u} \in \{0, 1\}$	$\forall g_i \in F, \; \forall u = 1, .., M$
$b_u(x, y) \in \{0, 1\}$	$\forall (x, y) \in \mathfrak{S} \; \cup \overline{\mathfrak{S}}, \forall u = 1, .., M$
$s_u^{\pm 2}(x, y) \geqslant 0$	$\forall (x, y) \in \mathfrak{S} \; \cup \overline{\mathfrak{S}}, \forall u = 1, .., M$

Paramètres :

$K_i > 0$	$\forall i = 1...3$

Fonction objectif :

$$\min \quad K_1\big(\sum_{g_i \in F}\sum_{u=1}^{M} p_{i,j}\big) - K_2\big(\sum_{u=1}^{M}\sum_{(x,y)\in A^2_{\pm 2}} b_u(x,y)\big) + K_3\big(\sum_{(x,y)\in \mathfrak{S}\ \cup \overline{\mathfrak{S}}} s_u^{\pm 2}(x,y)\big)$$

Contraintes :

s.t.

$$\sum_{g_i \in F} p_{i,1} = m$$

$$p_{i,u} \geqslant p_{i,u+1} \qquad \forall g_i \in F,\ \forall u = 1,..,M-1$$

$$\sum_{g_i \in F}\Big(p_{i,u}\cdot\big[\,S_i(x,y) - \overline{S_i}(x,y)\,\big]\Big) \ + s_u^{+2}(x,y) \ \geq \ b_u(x,y) \qquad \forall (x,y)\in\mathfrak{S},\ \forall u = 1,..,M$$

$$\sum_{g_i \in F}\Big(p_{i,u}\cdot\big[\,S_i(x,y) - \overline{S_i}(x,y)\,\big]\Big) \ - s_u^{-2}(x,y) \ \leq \ -b_u(x,y) \qquad \forall (x,y)\in\overline{\mathfrak{S}},\ \forall u = 1,..,M$$

$$\sum_{u=1}^{M} b_u(x,y) \ \geqslant \ 1 \qquad \forall (x,y)\in\mathfrak{S}\ \cup\overline{\mathfrak{S}}$$

$$\sum_{g_i \in F}\Big(\big(\textstyle\sum_{u=1}^{M} p_{i,u}\big)\cdot\ (S_i(x,y) - \overline{S}_i(x,y)\Big) \ \geqslant \ 1 \qquad \forall (x,y)\in\mathfrak{S},\ \forall u = 1,..,M$$

$$\sum_{g_i \in F}\Big(\big(\textstyle\sum_{u=1}^{M} p_{i,u}\big)\cdot\ (\overline{S}_i(x,y) - S_i(x,y)\Big) \ \geqslant \ 1 \qquad \forall (x,y)\in\overline{\mathfrak{S}},\ \forall u = 1,..,M$$

Contraintes (informelles) sur les poids inhérentes aux préférences du décideur :

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} = v_i \qquad \text{Pour certains critères } g_i$$

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} \geq u \quad \text{et} \quad \sum_{c=1}^{M} p_{ic} \leq v \qquad \text{Pour certains critères } g_i$$

$$\sum_{c=1}^{M} p_{ic} \geq \sum_{c=1}^{M} p_{jc} + 1 \qquad \text{Pour certains couples } (g_i, g_j)$$

$$\sum_{g_i \in H}(\sum_{c=1}^{M} p_{ic}) \geq \tfrac{1}{2}.\ \sum_{g_j \in F}(\sum_{c=1}^{M} p_{jc}) + 1 \qquad \text{Pour certains sous-ensembles de critères}$$

$$\sum_{g_i \in H}(\sum_{c=1}^{M} p_{ic}) \geq \sum_{g_j \in K}(\sum_{c=1}^{M} p_{jc}) + 1 \qquad \text{Pour certains sous-ensembles de critères}$$

3.5 Implémentation et expérimentations

Dans cette section nous commençons par présenter rapidement le logiciel permettant de procéder à une analyse inverse robuste à partir d'informations préférentielles partielles d'un décideur, et nous détaillons ensuite la méthodologie proposée sur l'exemple présenté précédemment dans cet article.

Le logiciel mettant en oeuvre le programme mathématique présenté à la section précédente est disponible sous la forme d'un service web dans le cadre du projet Decision Deck [3]. Ce service fait appel au solveur CPlex 11.0 via son interface de programmation AMPL. Les données d'entrée et de sortie sont modélisées au format XMCDA 2.0.0 [4] en vue de permettre sa composition avec d'autres services du projet Decision Deck (en particulier, calcul de la dénotation de robustesse et tracé du graphe de surclassement). Ce service web est entre autres disponible dans la plateforme diviz [5] qui permet de construire des workflows d'exécution d'algorithmes d'aide à la décision multicritère.

En vue de montrer la pertinence de notre discours, revenons à l'exemple fictif introduit en début d'article. Supposons que le décideur ait en sa possession la description de l'ensemble A des cinq alternatives, celle de l'ensemble F des cinq critères, le tableau de performances, ainsi que les seuils de préférence et d'indifférence des critères (voir tableau 1). En vue de déterminer la relation de surclassement permettant de résoudre son problème de décision, nous allons tenter d'obtenir un ensemble de poids des critères aussi *robuste* que possible à partir d'informations préférentielles partielles.

3. `http://www.decision-deck.org/ws`
4. `http://www.decision-deck.org/xmcda`
5. `http://www.decision-deck.org/diviz`

TABLE 5 – Surclassement et dénotation de robustesse associée

	$W_1 = \{2,1,1,1,1\}$										$W_2 = \{3,1,2,2,1\}$									
	$\widetilde{S}^{W_1}$					$[\![\widetilde{S}^{W_1}]\!]$					$\widetilde{S}^{W_2}$					$[\![\widetilde{S}^{W_2}]\!]$				
A	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
a	-	.58	.17	.67	.50	-	2	-2	2	0	-	.50	.11	.56	.44	-	0	-2	1	-1
b	.58	-	.33	.75	.50	1	-	-1	2	0	.61	-	.33	.72	.44	1	-	-2	2	-1
c	.83	.67	-	.50	.67	2	2	-	0	2	.89	.67	-	.44	.67	2	2	-	-1	2
d	.50	.50	.50	-	.50	0	0	0	-	0	.56	.56	.56	-	.56	1	1	1	-	1
e	.50	.50	.50	.83	-	0	0	0	2	-	.56	.56	.56	.78	-	1	1	1	2	-

Dans un premier temps, le décideur indique des préférences partielles sur un couple d'alternatives et l'importance d'un critère de la façon suivante :

– l'alternative c est préférée à a ;
– le critère g_1 est le critère le plus important.

Ces informations sont traduites en un ensemble de contraintes linéaires (voir section 3.5 ci-avant) et la solution optimale du programme nous fournit l'ensemble de poids $W_1 = \{2,1,1,1,1\}$. La relation de surclassement ainsi que la dénotation de robustesse associée sont repris dans la première partie du tableau 5. On note le fait que la résolution fixe toutes les variables d'écart à 0, ce qui prouve que la contrainte souhaitée par le décideur a pu être satisfaite de façon robuste (cPa).

En analysant la dénotation de robustesse, on remarque que beaucoup de valeurs sont en situation d'indétermination. Il est donc nécessaire que le décideur fournisse un peu plus d'informations en vue de déterminer un ensemble de poids qui soit plus discriminant pour la comparaison des alternatives.

Après avoir réétudié son problème de décision, le décideur estime qu'il peut nous fournir les informations supplémentaires suivantes :

– l'alternative b est considérée comme indifférente à l'alternative d ;
– la validation de la concordance pour les 3 critères $\{g_2, g_3, g_4\}$ est suffisante pour valider un surclassement.

Ces nouvelles informations sont retraduites en contraintes linéaires, et la résolution du programme mathématique nous donne l'ensemble de poids $W_2 = \{3,1,2,2,1\}$. La relation de surclassement et sa robustesse sont présentées dans la partie droite du tableau 5. On observe qu'un grand nombre d'indéterminations ont été levées. Notons également que, d'après la relation de surclassement, on a bien bId, cependant ceci n'est pas une information très robuste (on a $[\![\widetilde{S}^{W_2}]\!](b,d) = 2$, mais $[\![\widetilde{S}^{W_2}]\!](d,b) = 1$). Ceci se traduit également par une variable d'écart non nulle au niveau des contraintes linéaires. En pratique, cela implique qu'un léger changement dans le jeu de poids pourrait invalider l'affirmation du décideur au sujet de l'indifférence entre b et d.

Nous observons qu'en procédant ainsi, on peut arriver à obtenir un jeu de poids du décideur, via un questionnement indirect. Cette recherche se fait en essayant de maximiser la robustesse de la relation de surclassement, tout en respectant les préférences exprimées par le décideur.

4 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle approche d'analyse inverse permettant d'obtenir une estimation numérique robuste des poids des critères dans une analyse multicritère à partir d'informations préférentielles partielles qu'un décideur peut fournir, en se basant sur la notion de robustesse de CONDORCET d'une relation valuée bipolaire de surclassement.

Cette approche est actuellement distribuée par le projet Decision Deck sous la forme d'un service web, accessible entre autres à partir de la plateforme diviz. Les expérimentations pratiques que nous prévoyons dans nos travaux futurs nous indiqueront les voies de développement et d'amélioration, notamment quant aux méthodes de questionnement du décideur. En outre, un raffinement de la fonction objectif, permettant d'atteindre d'autres jeux de poids viables, ou plus généralement l'exploration du polytope des solutions possibles, devra être considéré.

Références

[1] Roy B. Critères multiples et modélisation des préférences (l'apport des relations de surclassement). *Revue d'Economie Politique*, Volume 84, n˚1, 1-44, janvier/février 1974.

[2] R. Bisdorff. Logical Foundation of Multicriteria Preference Aggregation. In : *Bouyssou D et al. (eds) Aiding Decisions with Multiple Criteria. Kluwer Academic Publishers*, pp. 379-403, 2002.

[3] R. Bisdorff. Concordant Outranking with multiple criteria of ordinal significance. *4OR : A Quarterly Journal of Operations Research*, 2(4) :293–308, 2004.

[4] Roy B, Bouyssou D (1993) Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas. Economica, Paris

[5] Mousseau V and Slowinski R. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples. *Journal of Global Optimization*, 12(2) :157-174, 1998.

[6] R. Bisdorff, P. Meyer and T. Veneziano. Inverse analysis from a Condorcet robustness denotation of valued outranking relations. *F. Rossi and A. Tsoukiás (Eds.), Algorithmic Decision Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNAI 5783*, pp. 180–191, 2009.

[7] Jacquet-Lagrèze E, Siskos Y. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making : the UTA method. *The European Journal of Operational Research*, 10 151–164, 1982.

[8] Mousseau V, Figueira J, Dias L C, Gomes da Silva C, Clímaco J N. Resolving inconsistencies among constraints on the parameters of an MCDA model. *The European Journal of Operational Research*, 147 (1) 72–93, 2003.

[9] Siskos Y, Grigoroudis E, Matsatsinis N F. UTA Methods. In : Figueira J, Greco S, Ehrgott M (eds) State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis. *Springer Berlin*, chapter 8 297–343, 2005.

[10] Grabisch M, Kojadinovic I, Meyer P. A review of capacity identification methods for Choquet integral based multi-attribute utility theory : Applications of the Kappalab R package. *European Journal of Operational Research*, 186 (2), 766-785, 2008.

[11] Greco S, Mousseau V, Slowinski R. Ordinal regression revisited : Multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *The European Journal of Operational Research*, 191 416–436, 2008.

[12] P. Meyer, J.-L. Marichal, R. Bisdorff. Disaggregation of bipolar-val-ued outranking relations. In : *L.T. Hoai An, P. Bouvry, P.D. Tao, editors, Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences, Communications in Computer and Information Science, Springer, Proc. of MCO'08 conference*, Metz, France, 8-10 September 2008, 204 - 213, 2008.